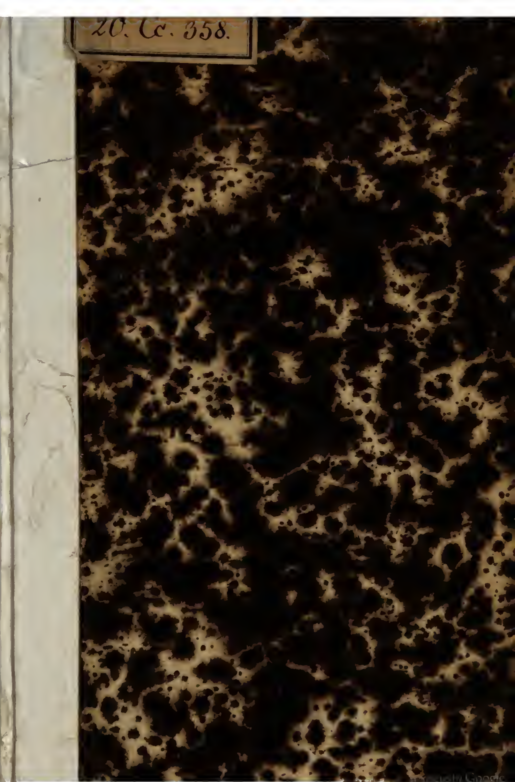


# RETTIFICAZIONE

## DI LINGUAGGIO

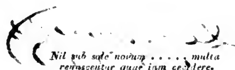
### PER ALCUNI ELEMENTARI PRINCIPJ

*DELLE MATEMATICHE*

PROPOSTA

## DA G. B. F. DE FILIPPI

*AUTORE DEI CENNI*
*SULLO STUDIO DI LINGUA ITALIANA.*



*Nil sub sole novum . . . . . multa renascentur quae iam cecidere.*

MILANO
PER GIOVANNI SILVESTRI
1820.

## *L' EDITORE.*

*Tra le possibili rivoluzioni, che lo scopo sembrano della filosofia, e il voto degl' inquieti spiriti del nostro secolo, nessuno forse ancora sognò quella cui pare tenda l'avvocato G. B. F. De Filippi. La più che adamantina solidità delle basi, ch' egli ha l' aria di volere in parte rovesciare, la natura della provincia in cui egli si proporrebbe di operare un tanto fenomeno, l' importanza dei personaggi che hanno interesse contro di questo, tutto ciò in fine che vi ha rapporto, è d' indole tale, per quanto fino al presente si credeva, da ostarvi affatto insuperabilmente. Un tanto scopo non ostante è manifestamente fatto palese dal titolo di un opuscolo che di questo autore sto per pubblicare, cioè:* Rettificazione di linguaggio per alcuni elementari principj delle matematiche. *I cambiamenti si minacciano, come ognun vede, in una provincia di assolute verità, ove regnano ingegni ed oracoli sommi, venerati dall' universo, in ogni tempo. Se le asserzioni, e la concatenazione dei raziocinj, onde è composto il pre-*

*sente lavoro, non eccedente la capacità dei più semplici aritmetici, dai veri dotti di queste scienze ai quali spetta darne giudizio, sono riconosciute per buona moneta, cioè per luminose verità, come a me sembrano, io non avrò che a felicitarmi coll'autore, coi giovani amatori di questa disciplina, e con me.*

*L'edizione è in tutto conforme a quella dello* Studio di Lingua *italiana del medesimo autore. Il prezzo è di una lira italiana, per quelli che daranno il loro nome prima del giorno* 16 *del prossimo venturo mese di ottobre; termine al di là del quale non si venderà che per tre lire italiane. Il pubblico non ignora che quanto erasi annunziato per lo* Studio di Lingua *circa il prezzo e la durata della associazione, fu letteralmente osservato.*

*Milano, primo di settembre* 1820.

# INTRODUZIONE

1. Propongo, e non dogmatizzo, quando manifesto al pubblico ciò che a me sembra utile, vero, giusto, conveniente, e non abbastanza finora conosciuto e seguìto.

2. Questa è la protesta che feci sempre, ogni qual volta resi di universale ragione colle stampe alcun mio pensamento.

3. Non mi crederei per altro sicuro abbastanza e garantito per mezzo della presente ingenua dichiarazione contro l'uggia ed il morso dell'amor proprio, che in molti si avrebbe per adontato, se i più interessati a trovarmi torto nel presente opuscolo fossero anche i più soggetti a pedanteria, voglio dire, se la loro classe, anche più abbondante che quella dei grammatici (quantunque una infinità di sciolucci si credano grammatici perchè insegnano grammatica) ne contenesse nel suo seno tanti di quei che altro nome non meritano che il solo di pedanti, come non altro se ne merita da una immensa parte della classe dei grammatici.

4. Ma fortunatamente le importanti questioni, che nel volante e breve attuale mio scritto intraprendo a discutere, interessano meno i semiscioli venditori di chiacchiere, che non la più rispettabile classe dei veri dotti, dei sommi scienziati, dei grandi matematici.

5. Questi sono accostumati a moversi non per invidia o per astio, ma solo per desiderio di trovare la verità; essi non sogliono por mente, nè alla età, nè agl' impieghi, nè agl' interessi, nè alla fortuna, nè ai titoli, nè al tuono della voce, nè al color delle vesti, nè ad altre accidentalità di chi provoca la discussione, e che all' oggetto di questa sono straniere.

6. Penetrato e compreso da profonda venerazione pei sommi uomini che scrissero nelle materie matematiche, se ardisco avanzare che la scientifica loro favella parmi talora un cotal poco bisognosa di lima e di brunitojo, sono ben lungi dal sognare di mettermi a confronto con essi.

7. Intenzion mia, e intenzione unica nel presente mio caso, si è quella di chiedere schiarimento per le cose che non si puonno da tutti abbastanza comprendere.

8. Mi par di avere in matematica pene-

trato quanto basta per capirne la lingua ; e di aver tanta suppellettile d' ideologia quanta ne fa di mestieri per distinguere ciò che nelle poche da me conosciute lingue trovasi di antilogico , d' inesatto , d' inintelligibile.

9. Parmi dunque di essere fondato a emettere quello che nelle attuali materie io penso; ma poi, fondato o no, ciascuno ha diritto di esporre al pubblico i suoi pensamenti , quando da questi non si offende nominatamente alcuno; come a chiunque è permesso di chiedere, per essere iniziato, di ciò che non sa: gli altri hanno il diritto di esaminare e di censurare.

10. Chi avrà dimostrato e meglio dimostrato, cioè *veramente* dimostrato, le proprie asserzioni , egli sarà il più seguìto.

11. Il trionfo della verità formar deve l'ultimo risultamento degli atriti nelle materie intellettuali; e questo è poi ciò che importa; segnatamente quando si tratta di facilitare alla gioventù l'acquisto delle scienze.

12. Altronde io sono nel numero di chi non capisce le cose per le quali scrivo: dunque non mi ha da essere interdetto di domandarne la spiegazione, e di far vedere in che consiste ciò che m' impedisce di giungere alla comprensione di esse.

13. Fra le più rispettabili facoltà, onde agli esseri pensatori è dato di potersi occupare sublimemente non solo, ma d'intraprendere pur anco a distinguersi fra i proprj simili, è certo che le matematiche, scienze assolute, hanno seggio distinto: gl' infiniti generi di utilità, diretta e indiretta, che ne sono provenienti, aggiungono innoltre un esterno pregio grandissimo alla intrinseca loro eccellenza.

14. Una specie quindi a me sembra d'innegabile profanazione il permettersi nell'esercizio delle medesime, un linguaggio non del tutto perfetto, e non rigorosamente conforme a quella profonda metafisica o ideologia che presiedette ai loro principj.

15. Ogni neo benchè menomo, nelle matematiche, prende al mio sguardo indole quasi di macchia, e di ben grave macchia, offuscante l' augusto carattere di evidenza (parlo tanto di quella che è cospicua per tutti, che della risultante da dimostrazione) che le rende venerabili; esso lascia luogo pur anche alla irriverenza dei dubbj sulla loro infallibilità.

16. Sono desse d' altronde che alle altre discipline devono i mezzi somministrare del perfettibile loro miglioramento.

17. Il bisogno di adoperare nell' uso dei precetti matematici un linguaggio veramente chiaro ed esatto, aumentossi, e divenne ancor più importante dachè il buon senso entrar fece lo studio di essi nel sistema di educazione per la prima gioventù; sistema che perciò avvezza di buon' ora le ancor tenere menti alla esattezza, ed al nobile rifiuto di lasciarsi appagare dalle chiacchiere; sistema che, dietro la raccomandazione e la esperienza fattane dai più accorti, è già seguìto da tutti quei padri di famiglia che ragionano, e che veramente di cuore desiderano la istruzione de' loro figli; sistema che, oltre le vantaggiose cognizioni, a tutto applicabili, ond' è ferace produttore, anche un mezzo infallibile somministra di felice sviluppo delle intellettuali facoltà, sostituendo alle regole del ragionamento l' esercizio e l' abitudine di ragionare con giustezza; esercizio ed abito più preziosi che tutte le possibili seste o sagome, e che tutti i possibili aforismi, e precetti proprj della logica.

18. Parmi di veder introdotte mal a proposito, cioè fuor di luogo e fuor di senso, in quel divino santuario di scienze delle quali ora parliamo, alcune voci che da' comuni,

ma illustri, riccvuti, sanzionati, venerati, linguaggi provenendo, intatto più che mai conservar dovrebbero il significato reso in essi già loro proprio dai sopraddetti titoli, e consacrato dalla etimologia, e dal costante universale consenso: eppure non sempre lo ritengono; anzi, a giudicar dei vocaboli dalle definizioni, dai precetti, e dalle sentenze, si è tentati di credere ch' essi dai limpidi e conosciuti lor fonti siansi dilungati già tanto da prendere qualche volta nei libri elementari di matematica un'affatto opposta interpretazione, con evidente discapito di quella chiarezza che le attrattive forma, gl' incanti e il carattere della bella verità.

19. Forse è per questo che il celebre *d'Alembert* non vedea nei libri elementari di matematica, dei quali tanto ridondiamo, che una sterile abbondanza, capace più d' imbarazzarci che di arricchirci.

20. La chiarezza e la luce non è temuta ed evitata che negli spregevoli penetrali della ipocrisia, della impostura, della menzogna e del delitto, ove o gerghi solo si parlano, o lingue morte, intralciate, difficili, che perciò appunto si vogliono, perchè di tenebre, di mistero e d' inganno abbisognasi.

21. È pertanto sulla esattezza (finora se non in tutto almeno in parte) desiderata del matematico linguaggio, vale a dire di alcuni vocaboli, di alcune frasi e di alcune definizioni ond' esso emerge, si sviluppa, e consacrasi, che di eccitare desidero, e intendo, la più viva, sostenuta, costante attenzione dei dotti.

22. Colui che, parlando di me, a proposito del mio libro intitolato *Studio di lingua italiana*, disse ch' io sono un *novatore*, or dirà che sono *parolajo*.

23. Ringrazio ben di cuore costui; poichè il titolo di novatore, inventato da certi settarj, a intendimento d' infamare chi non diceva come loro, a me pare dinoti un uomo il quale, colla sola forza delle parole, attira, strascina, determina il consenso, come si fa dagli assiomi.

24. Altronde sono così contento e preoccupato di ciò che fu detto di quel mio libro dai dotti, dalle gazzette e dai fogli scientifici nazionali ed esteri, che tutto parmi elogio, dopo che si trovò che questo è a livello con tutte le ideologiche massime in oggi dominanti, e che si legge con quel piacere con cui si leggerebbe una storia. Gran dire! trat-

tandosi di rudimenti e precetti, materia per sè affatto sterile, e ingrata. Io ne vado superbo; tanto più che nessuno fino al dì d' oggi, pronunzionne (ch' io sappia) censura, meno che la biblioteca italiana che riprovonne, in mezzo per altro agli elogi, alcune parole; motivando la condanna dachè queste non si trovano nel dizionario dei così detti accademici della Crusca; cosa, per verità, che a me importa pochissimo. Io non mi lagno certo della biblioteca italiana, che di questa come di altre mie produzioni ha parlato con vantaggio. D' altronde rimontare alla etimologia, ed ai naturali principj di spontanea non dimostranda evidenza, può essere forse migliorazione, ma non è innovazione; giacchè non è dir cose pienamente nuove: al contrario, questo più che altri mai è forse il caso di ripetere che *nil sub sole novum . . . . . multa renascentur quae iam cecidere;* e forse quel che vi ha di più maraviglioso nella mia scoperta si è che altri non l' abbia fatta prima di me; tanto essa è semplice. Questo è il caso dell' uovo fatto stare su ritto sulla sua punta.

26. Quello frattanto che a me già pare dimostrato si è che, se all' astro matematico

giunta e ricchezza io non apportai di nuovi mondi, come colla terra fece Copernico e col cielo Galileo, almeno ebbi la dolce soddisfazione di restituire al naturale proprio loro emisfero, di cui sono indigeni, que' mondi matematici che per colpa d' ingiusti giudici se ne trovano in bando, cioè una moltitudine di prodotti rinviata nei climi delle quantità operate in aumento, e una di quoti rimandata nei climi delle operate in decremento; soddisfazione veramente umana e più nobile che quella dei conquistatori. Se questo consolante pensiero è poetico troppo per una prosa così liscia come è la presente, perdonerassi all' antica costumanza della mia gioventù, della quale pur mi risento, perchè l'anima mia non è ancora del tutto invecchiata, costumanza d' ingerirmi qualche volta di poesia.

27. Quanto a parolajo, se è tale chi studia le parole, sapendo che dallo intelligibile e ben compreso significato di esse dipende la chiarezza del dire, come anche il segreto di scoprire e d' inventare, accetto il titolo.

28. Se in vece vuolsi dinotare il gir a caccia ed a pesca di parole straordinarie, per usarle come belle, appunto solo perchè straor-

dinarie, si vedrà ch' io mi picco di tutt' altro che di questo.

29. Qualora pretendasi di additare un chiacchierone, i dotti del pubblico giudicheranno se questo titolo mi convenga.

30. Frattanto, contando pure per qualche cosa, come è naturale, il merito della mia buona volontà, e lo sforzo de' miei tentativi, unitamente al po' di chiarezza che regna nella presente mia discussione, e al sussidio da me recato agli studiosi, sento già che si parlerà di me con vantaggio; talchè posso ripetere il detto di un gran genio: *je me vois dans l'histoire.*

*Numero.*

31. Lascio da parte quelle frasi, quelle locuzioni, e molto più quelle isolate dizioni, che colpa solo o di ammanuensi copisti esser possono o di tipografi, e che comuni appunto per questo alla parte maggiore non sono degli elementisti più accreditati, come sarebbe per esempio l' appellazione antilogica di *numero infinito*, mentre che *numero è circoscritto adunamento o somma di somiglianti unità*; di maniera che illimitato e indefinito

esso puol essere bensì, che è quanto dire così esteso da ignorarne, da non conoscerne i limiti veri, esistenti affatto e reali; ma infinito non mai.

32. Questa idea d'infinito, che vuol conciliarsi con quella di ente, a rigore di etimologia non è neppur compatibile abbastanza con quella di quantità; benchè in matematica si concepiscano due infiniti eguali, come pure una somma, e un prodotto d'infiniti; appunto perchè quantità è ciò di cui si può concepire qualche cosa di più piccolo o di più grande.

33. L'essere stato introdotto dagl' inventori un vocabolo, non è ragione sufficiente, per cui esso debba rimanere a perpetuità conservato come tecnico, e propriamente adattato a quella persona, cosa, idea, nozione, cui fu riferito a principio, se non la esprime con esattezza. Chi ne vede la inconvenienza, e trovar sa una espressione più precisa e più giusta da sostituirvi, dee farlo non solo, ma farlo in modo solenne, per cui tutti ne restino avvertiti e informati.

34. È dietro questo principio che a me pare si dovrebbe alla fin fine sbandire il nome di *geometria*, non già dalla lingua delle

scienze, ma da quel solo significato che vi fu attribuito finora, e sostituirvi quello di *estensilogia*, che è scienza di trovare, confrontare, calcolare quelle misure, qualunque sieno, che riguardano la estensione. Il vocabolo *geometria* ritornerebbe alla sua vera e primitiva significazione, cioè l' arte di misurare terre, terreni e paesi, come quello di *agrimensione*, sinonimo del francese *arpantage*, significa misura di particolari, determinate, campagne, o sia poderi, e *tipografia*, scienza di fare e di combinar tipi; mentre che intanto si adoprerebbe il nome di *metrologia* per esprimere la scienza delle misure prese in genere.

## *Quantità opposte.*

35. La etimologia della parola *opposto* fu la cagione per cui giustamente credettesi di dover definire le quantità opposte, (le quali non possono mai essere che quantità concrete) chiamandole quantità, la cui somma dà un resto, e la cui differenza è vero aggregato.

36. Le indoli essenziali, vale a dire, le contrarie attributive determinazioni, le pro-

prietà costituenti eterogeneità e contrasto fra tali enti, rendono quasi ovvia l'ammissione di un risultamento, non solo onninamente diverso da quello che attendesi naturalmente da operazioni realmente non eseguibili che fra quantità omogenee, ma contrario; poichè non consistendo la loro eterogeneità che nella sola proprietà di opposizione, talchè, tolta questa, non altro più si trova che omogeneità nelle altre proprietà, mentre intanto ognuna di tai quantità, separatamente presa, è capace di aumento e di diminuzione per mezzo dell' altra, è facile comprendere l' anzidetto risultamento; come si capisce, per esempio, che unendo insieme una piccola quantità di sugo nero con una grande di sugo bianco, assorbito viene il color nero; e ciò che resta di bianchezza non è che quella differenza dalla data che lasciossi come semplice residuo dall' opposto colore, il quale immedesimatosi con l' altra parte la distrusse, distruggendo in certo modo con essa sè medesimo.

37. Questo è il motivo per cui non si dà vera moltiplicazione nè vera divisione fra quantità opposte; poichè queste due operazioni esigono un fattore astratto; mentre invece le opposte sono ambedue concrete.

38. Se, giudicando dal fatto, par che queste operazioni sugli opposti si eseguiscano, ciò è solo perchè, astrazion fatta dai segni, che dinotano opposizione, tiensi l' un degli opposti come astratto; ed, eseguita che sia l'operazione, dassi al risultamento di essa quella destinazione di addenda o di sottraenda quantità che dal segno venne indicata e prescritta.

*Divisione.*

39. Pretendere per altro e dogmatizzare che debbasi avere contrarietà od opposizione di causa e di effetto tra i risultamenti di quelle operazioni che si eseguiscono sulle quantità omogenee, come sono intieri e rotti, quasichè suppongasi che rotto sia qualche cosa di opposto ad intiero; pretendere anco, ed insegnare, che il risultamento della moltiplicazione d' un intiero per un rotto, e reciprocamente, sia quantità minore del moltiplicando; pretendere finalmente con pari assurdità, e insegnare che il risultamento della divisione d'un intiero per un rotto, e reciprocamente, sia quantità maggiore del dividendo, è denaturalizzare, è rinnegare l' idea della moltiplicazione e della divisione, è affettare, in una

scienza che è pura verità, un linguaggio da mago, da sortilego, da oracolo, da indovino, da ciarlatano, da maestro di menzogna.

40. Questo è uno dei motivi e dei casi, per cui molti alunni, giunti al maneggio delle frazioni, trovano inciampo alla pronta intelligenza, si spaventano, e, disadatti credendosi allo studio delle matematiche, le abbandonano; ed è da questo spavento, e da questo abbandono che i pedanti venditori di chiacchiere, i cianciafrusculaj, perpetui nemici delle matematiche, come il delitto è nemico della luce, presero e prendono occasione, armi, pretesto di asserire dogmaticamente che non tutti i giovani possono imparare le matematiche, la quale asserzione significa poi quanto dire che non tutte le menti capaci di ragionare, nate per ragionare, destinate a ragionare sono atte a ragionare. I meschini non si avveggono che in questa loro asserzione consiste una delle migliori prove che il pedante non è animale ragionevole.

41. La oscurità di un elittico linguaggio adoperato in queste materie dagli antichi fu la cagione del male: dunque dalla etimologia dei vocaboli, dalla indole immutabile degli assiomatici principj, vale a dire dalla soli-

dezza di quelle naturali verità delle quali niun essere pensante avvisossi o avviserassi giammai di dubitare o di chieder prova, sarà necessario di prendere le mosse per evitare il grande inconveniente.

42. La divisione fu dagli antichi definita *operazione per cui cercasi quante volte una quantità è contenuta in un' altra.*

43. Io, nelle mie lezioni di matematica stampate a Genova, l' ho definita *operazione in virtù di cui una data quantità, che appellasi dividendo, si decompone in parti eguali, chiamate quoto, e la grandezza delle quali è determinata da un' altra quantità che appellasi divisore.*

44. Dalla definizione degli antichi risulterebbe (qualora essa fosse adottata per vera ed esatta) l'erroneo principio che ogni quoziente, e perciò anche ogni rotto vero, sia numero astratto; poichè non ad altro destinato che ad esprimere quante volte il divisore è contenuto nel dividendo.

45. Ne risulterebbe pur anche l' assurda massima che un resto di operata divisione non possasi aggiungere al quoto: in fatti un tale resto sarebbe del tutto eterogeneo al quoto; perchè ogni ultimo resto di dividendo

è parte di esso; e la parte è omogenea col tutto; ed è sempre concreta com' esso; e perchè il dividendo è sempre concreto; mentre, come già si è osservato (44) il quoto sarebbe astratto.

46. Ne nasce l' inconveniente di confondere le ragioni con le frazioni; quantunque le une sieno cose ben diverse dalle altre, come direttamente dimostrerò, e come frattanto il più ovvio esempio qualunque può renderlo affatto manifesto: prendasi a questo intento la frazione $^{15}/_4$: essa è somma delle frazioni $^{12}/_4$ e $^3/_4$: la ragione per altro di 15 : 4 non è somma delle ragioni 12 a 4 e 3 a 4, cioè 12 : 4 e 3 : 4; in fatti la somma delle ragioni è in primo luogo ragione; in secondo luogo essa è precisamente quella che vige tra il prodotto degli antecedenti delle ragioni sommate, e del prodotto dei conseguenti delle medesime: dunque nel presente caso è quella di 36 : 16, vale a dire di 9 : 4.

47. Onde fanno malissimo quei che, volendo indicare algebricamente la divisione da farsi di una quantità per un' altra, lo fanno per mezzo di due punti, che altronde in linguaggio algebrico dinotano ragione.

48. Ne nascerebbe che la divisione sia ri

pugnante affatto e impossibile in ogni senso ogni volta che si tratti di praticarla nelle quantità positive per mezzo delle negative, od in queste per mezzo di quelle; poichè le une sono l' opposto delle altre; il che importa eterogeneità, la quale non può aver luogo fra intiero e parte.

49. Ora che sono riconosciuti gl' inconvenienti della definizione degli antichi, e perciò la erroneità della medesima, osserviamo come, rettificato il linguaggio, e trovata la vera definizione, tutto diventi liscio, naturale, spiegabile.

50. Il procedimento che il calcolatore operante divisioni segue, andando dalla propria sinistra verso la propria destra, procedimento affatto opposto a quello adoperato per eseguire la moltiplicazione, non solamente non manca più di motivo e di spiegazione, secondo la mia definizione, come ne mancherebbe se si ammettesse per vera quella degli antichi; ma per contrario appalesasi quasi da sè stesso come necessario e manifesto.

51. La etimologia del nome divisione, che vuol dire spezzamento o decomposizione di una quantità in più altre, si trova nella mia definizione, ma non già in quella degli antichi.

52. La mia definizione è applicabile anche alle frazioni: quella degli antichi non lo è. Ciò or ora si renderà manifesto.

53. A tenore della mia definizione, il determinamento della grandezza, vale a dire, delle accidentalità di quelle unità o parti eguali, che compongono il quoto, dipende, come il senso comune lo esige, dalla qualità del quesito che ha dato luogo alla divisione.

54. La mia definizione stabilisce identicità d'intrinseca specie, di proprietà, di natura tra il dividendo e il quoto, appunto perchè questo è parte di quello. Anche ciò è coerente alla etimologia delle parole.

55. Io stabilisco per massima che il divisore è sempre un numero puramente astratto, il quale ad altro non serve che a far conoscere in quante parti eguali va spartito il dividendo, e quale sia di esse la qualità, cioè la grandezza (veggasi nel mio *Studio di lingua* la differenza che passa tra proprietà e qualità §. 278 e 279). Ciò è pur consentaneo alla natura, e alla marcia della divisione non solo, ma pur anche a quella della moltiplicazione, la quale richiede che il quoto sia, non già moltiplicatore, ma moltiplicando, cioè non un numero astratto che può espri-

mere qualità bensì, quale è grandezza, ma non mai proprietà, quando per mezzo di esso vuolsi ristabilire il dividendo. Questo è far parlare al calcolo il linguaggio della grammatica, della verità e del buon senso.

56. Il segno più +, e il segno —, da cui può essere preceduto il divisore, indicano solo se il quoto avrà da essere sottratto dalla quantità che precede, o che può precedere o se dovrà essere ad essa unito, cioè aggiunto.

57. Dunque fa d' uopo sostituire alle nomenclature di quantità positiva e di quantità negativa quelle di quantità additiva, e di quantità sottrattiva; il che è consono con la definizione (35) delle quantità opposte.

58. La sola cosa che a termini della mia definizione rimane inestricabile è il quoto più grosso del dividendo; ma siccome, appellando agli assiomi ed alla etimologia di quoto, sostengo che non si dà in natura un quoto che comprenda il dividendo, cioè una parte che comprenda il tutto; siccome innoltre direttamente dimostro che il preteso quoto maggiore del dividendo altro non è che un vero prodotto, così questa grave difficoltà, lungi dal distruggere la mia definizione, la conferma; ed essa è perciò una nuova di-

mostrazione della necessità di rettificare, o sia di riformare il linguaggio del calcolo, relativamente ai quoti ed ai prodotti. Veniamo al fatto.

59. Quando i primi calcolatori stabilirono le regole di procedimento, o sia di operazione, adoperarono in alcuni casi una vera elisione di frase.

60. Appigliaronsi essi ad un così fatto partito per solo amore di brevità, colla mira di rendere più conciso il precetto; affinchè questo in tal modo riuscir potesse più facile a ritenersi a memoria.

61. Gli scrittori di regole proprie dell'arte di calcolare, i quali succedettero ai primi inventori, fecero quel che suol farsi dai più, cioè non esaminarono, ma copiarono materialmente, vocabolo per vocabolo, le regole date dai loro predecessori, ritenendo e ripetendo fedelmente; anzi servilmente il suono, ed ogni altra esteriore accidentalità del precetto, senza investigarne il vero senso. Così, di ripetizione in ripetizione, fu prescritto e sanzionato coll'uso, passato in tacita convenzione, un linguaggio assurdo.

62. *Newton* fu il primo a conoscere una sì grande assurdità di linguaggio; ma questo

sommo ingegno, in luogo di cercare l'origine del male per ovviarvi, appigliossi al pagliativo, inutile partito, d'incolparne la povertà di tutte le lingue, anzi finanche la natura medesima, come non capaci di somministrare alle scienze inventate dagli uomini una espressione più esatta: egli per giunta, od almeno per conferma di male, dopo di aver pronunziata quella imputazione, tanto priva di fondamento, lasciossi anche di penna sfuggire nelle sue opere alcune asserzioni affatto spropositate (per quanto almeno a me ne sembra), quai sono quelle che si leggono nelle pagine 6 e 7 della edizione di Leyda, cioè *Multiplicatio proprie dicitur quae fit per numeros integros . . . . . . sed aptioris vocabuli defectu multiplicatio etiam dici solet quae fit per fractos aut surdos numeros, quaerendo novam quantitatem in ea quacunque ratione ad quantitatem multiplicandam, quam habet multiplicator ad unitatem . . . . Divisio proprie est quae fit per numeros integros, quaerendo novam quantitatem toties minorem quantitate dividenda, quoties unitas sit minor divisore; sed ob analogiam vox etiam usurpari solet cum nova quantitas in ratione quacunque ad quantitatem dividendam quaeritur,*

*quam habet unitas ad divisorem; sive divisor ille sit fractus aut surdus numerus, aut alia cuiusvis generis quantitas.*

63. In primo luogo è falso che non si diano vere moltiplicazioni o divisioni, le quali non sieno operate per mezzo d'intieri: or ora dimostrerò il contrario.

64. In secondo luogo è falso che nei comuni linguaggi non sia reperibile una espressione tecnica (se pur fosse necessaria), la quale sia relativa in modo generico ai risultamenti dei quali *Newton* favella, vale a dire, a quelli operati per mezzo delle frazioni, e che si chiamano prodotti e quoti.

65. Io domanderei ben di cuore perdono all'ombra venerabile dell'inclito *Newton*, se potessi figurarmi che quel genio veramente insigne fosse capace di adontarsi e di crucciarsi, come fanno le anime da poco, contro chi nella scoperta, o anche solo nella ricerca di una verità sia costretto a dimostrare a lui qualche di lui torto o sia sbaglio.

66. Volendo i primi calcolatori tracciare altrui l'andamento da seguirsi per trovare un prodotto, allor quando il termine astratto, per mezzo di cui si opera, vale a dire il moltiplicatore, o sia il coefficiente, è rotto vero,

ma congiunto ad intieri, dissero, probabilmente, che bisognava prendere separatamente prima il prodotto degl' intieri, e poi quello dei rotti: con queste ultime parole *quello dei rotti* forse intesero essi dinotare quelle parti di totale prodotto, cioè quei prodotti parziali, che corrispondono ai rotti, cioè prendere i quoti che sono comparti del totale prodotto; oppure anche nessun' altra significazione attaccarono essi alla parola *prodotto* che quella di *risultamento*. L'elisse o sincope di frase, o se così vuolsi, l' equivoco oppur anche l' errore, sta dunque in queste ultime parole.

67. Quello che si fa, quando sopra un moltiplicando si opera per intieri e rotti, non è già una sola pura e semplice moltiplicazione, sempre identica dal primo all' ultimo tratto che compisce l' intiera formazione del prodotto; ma è sì bene l' unione di più prodotti parziali, e di uno o più parziali quoti, cioè l' unione di non solo varie ma differenti operazioni, giacchè si fanno delle moltiplicazioni parziali, si fanno delle divisioni parziali: più ancora: i risultamenti di queste ultime si ripetono più volte, se è necessario di farlo, oppure per abbreviamento di ope-

razione si moltiplicano (ecco altra circostanza che potè farle chiamar prodotti) per quel tal numero di volte che, a tenore del così detto numeratore, farebbe d'uopo di scriverle, se si volesse farne semplicemente la somma; e per ultimo si fa un generale aggregato dei varj ottenuti risultamenti parziali di tutte le moltiplicazioni e divisioni eseguite.

68. Quest' ultimo generale aggregato appellasi a giusto titolo *totale prodotto*; cioè quantità che con un'altra da cui essa nasce ha rapporto di tutto a parte; perchè in fatti cape il moltiplicando, non solo tante volte quanto chiedevasi dalle astratte unità del moltiplicatore, ma innoltre tante parti di volta (se così è permesso di esprimersi) quanto esigevasi dalla frazione di questo; il che poi vuol dire che contiene anche tante parti dell' intiero moltiplicatore quante ne furono indicate dal così detto numeratore della frazione che abusivamente chiamasi moltiplicatrice, perchè si crede parte del moltiplicatore (circostanza importante), ma che di natura sua è divisora: in fatti essa è bensì congiunta col moltiplicatore per operare sul moltiplicando, ma non si dirà parte di quello, se attentamente si osserva con occhio di anali-

si; giacchè il moltiplicatore ugualmente che il divisore, astratti essendo, mai possono essere di natura loro frazionarj, cioè aver parti; motivo, non avvertito finora, per cui non si può adoperare un divisor frazionario: essa non è che un numero astratto indicante in quante parti eguali va diviso il moltiplicando, e quante di queste è necessario di prendere per unirle agli altri prodotti parziali.

69. Dunque nello stabilire il precetto dovea dirsi che, dopo di aver preso per opera degli astratti intieri quei varj prodotti parziali che hanno ad essere compresi nel totale prodotto, è necessario di prendere, per mezzo della unità frazionaria proposta, e di moltiplicare pel numero frazionario, o sia per la imposta ripetizione della unità frazionaria, cioè pel così detto numeratore, il quoto omogeneo al moltiplicando, che ha da essere compreso nel totale prodotto (68), cioè la parte di moltiplicando che fu indicata dalla imposta ripetizione della unità frazionaria.

70. A proposito di ripetizione, parmi conveniente di far anche osservare che il nome di *numeratore* dato fino al presente a quello dei due termini della frazione che ponesi nel di sopra della linea ond' essi l'uno dall' altro

sono distinti, è inesatto; poichè numeratore è parola derivante da *numero* e da *numerare*; ma siccome un rotto non è sempre numero frazionario, giacchè è qualche volta unità frazionaria, così ne segue che il termine di frazione situato nel di sopra della distinguente linea non è sempre numero, vale a dire, non è sempre aggregato (31), cioè non è sempre uno dei generici plurali di unità (*le unità*, cioè la parola *unità*, preceduta dall' articolo *le*, è l'altro plurale generico), ma è non rare volte la unità medesima: dunque non è numeratore.

71. Potrebbe alcuno credere opportuno di chiamarlo *spartitore*; ma esso non è quello che opera la spartizione; d'altronde questo vocabolo è quasi affatto sinonimo della parola *divisore*, la quale in materia di frazioni è sinonima di denominatore.

72. Oltre ciò parmi pure che sarebbe conveniente, volendo introdurre un vocabolo non ancora comunemente usato, far che questo non tolga il non so che di variante o distinto che a ben giusto titolo si trova tra il divisore propriamente detto, che è numero intero, e il denominatore, che appartiene a quella sola specie di divisori, nessun indivi-

duo della quale si può esprimere nè in voce nè in iscritto, che per mezzo di due quantità.

73. Io dunque lo chiamerei *contatore* per dinotare che è quella quantità che in concorrenza con altra esprime frazione; ma che la esprime contando, come ciò si fa dalla unità misuratrice, vale a dire nel senso delle proprietà del quoto, e non già in quello della loro qualità: quest' ultimo senso concerne la grandezza che regna fra le uguali parti del decomposto o decomponendo; e ne è costitutiva, cioè concerne il denominatore.

74. La nozione di unità non concerne le qualità: essa è inseparabile dalla nozione delle proprietà per tutto ciò che nel concepimento nostro è uno.

75. L' *uno* è prototipo operante misura, e non mai risultamento di misurazione: in fatto esso, quando si ha per quoto, non esprime che una quantità divisa per sè stessa; ma una quantità non divide realmente mai sè stessa; poichè non può essere contemporaneamente tutto e parte: dunque non è risultamento.

76. Dunque l' unità non è mai vero divisore, nè è mai vero moltiplicatore: questa non è che limite di separazione fra le ragioni

crescenti e le decrescenti, come lo zero è limite fra le addende e le sottraende (57), cioè le opposte quantità, finora chiamate quantità positive, e quantità negative.

77. È per questo che, dandosi la unità per divisore agl' intieri, non intendesi di ottenere in grazia di essa un quoto: gl' intieri prendono in tal caso bensì un' apparenza di frazione, perchè la unità è collocata là ove non ha da stare che un denominatore; ma essa non è denominatore nè di operate, nè d' indicate parti eguali, cioè, nè di operata, nè d' indicata divisione; e lo rappresentamento in cui, mediante la provvisoria collocazione ottenuta in imprestito, essa concorre, non è che frazione apparente: in fatti è così che si chiama, talchè con vocabolo, ancora più rigoroso sì, ma più espressivo, dai più si appella *frazione mentita*, perchè in fatti quella unità in una tale pretesa frazione mentisce un carattere di denominatore, vale a dire di divisore.

78. Qui mi cade in acconcio di far osservare il torto di coloro che mettono distinzione tra le frazioni apparenti e le frazioni mentite; quantità tutte che sembrano e non

sono frazioni: chi è in fatti che appellerà frazioni $^{36}/_{1}$, $^{36}/_{4}$, $^{a}/_{1}$, $^{36}/_{36}$, $^{3a}/_{a}$, $^{a}/_{a}$ . . . ?.

79. Si dà ben distinzione tra quelle di massimo, e quelle di ancor possibile semplificamento, cioè tra prima e seconda, si dà tra mentita e vera, tra pura e mista, tra le somiglianti e le dissimili, ma niente affatto tra mentita e apparente.

80. Convien portare ancora più avanti la riforma, e cambiare la generica denominazione di termini attribuita finora mal a proposito alle due quantità che congiuntamente concorrono alla espressione di rotto, cioè, d' indicata divisione.

81. Siccome il vocabolo *ente* si riferisce in maniera universale a quanto in natura vi ha di concepibile dall' umano intendimento, cioè, composti, chiamati animali, spiriti, se si vuole, materia pura, nozioni e idee; così *parola* si riferisce a quanto entra nella composizione delle proposizioni; e perciò a quanto si trova negli umani linguaggi, vale a dire, a nomi, verbi e accidenti (si vegga il mio studio di lingua). Ora, siccome gli enti si dividono in classi, queste in generi, dai quali vengono le specie, che si decompongono per individui, così lo stesso ha luogo nelle parole.

82. Il vocabolo *termine*, in matematica è classe che abbraccia tutte le quantità sulle quali calcolando si opera, cioè tanto le additive (57) che le sottrattive; e perciò tutte le somme, tutti i resti, tutti i prodotti e tutti i quoti: ciò che in questi vi ha di parziale non è termine, ma uno dei generi di esso, vale a dire inchiusi nel medesimo, cioè, una parte di termine.

83. Questo è il motivo pel quale in algebra più termini chiusi fra parentesi tengonsi per unico termine.

84. Il nome di fattori è generico delle parti di prodotto: ogni parte di genere è una specie: ogni specie ha le sue sottospecie, l'ultima delle quali si divide in individui. Così nelle classi ternarie dei numeri costituenti la naturale progressione, ogni centinajo è genere, ogni decina è specie, ogni unità è individuo; e vi ha la classe degli individui, quella delle migliaja, quella dei milioni, ec.

85. Per le quantità poi che concorrono alla decomposizione, vale a dire, alla indicazione ed alla effettuazione di un quoto, non si ha finora, ch' io sappia, nome alcuno specifico: io li chiamo *sfazzoni*.

86. Pare a prima vista che possano chiamarsi egualmente sfattori; ma non è vero.

87. *Sfattori*, tradotto a tenore di etimologia, significa scompositori, vale a dire, agenti scomposizione: ora il dividendo non è agente, ma paziente: dunque esso non è compreso nella parola scompositori o sfattori.

88. Quantunque il nome *fazzone* (85), sinonimo dei latini *factor* e *factio*, venga, come il nome fattore, da *facere*, cioè fare, pure, siccome a norma della comunemente adottata significazione vale *forma, foggia, fattezza, effigie,* ec., così è riferibile tanto a quella quantità la cui foggia si decompone, cioè, il (73) contatore, che a quella per mezzo di cui si dinota la qualità della decomposizione operata o da operarsi, cioè la grandezza delle parti eguali, che è quanto dire, il denominatore.

89. In Algebra, che è la più importante parte delle matematiche, si dà per definizione il nome di termine (82) a ciascuna delle varie, qualunque sieno, espressioni delle quali trovansi composte le frasi algebriche: questo è giustissimo e coerente al senso comune: in fatti si hanno in tutte le lingue presso a poco per sinonimi *parola, vocabolo, espressione, termine, dizione,* parti di frase: poi, contraddicendo colla pratica a questa massima, giu-

stissima, si chiamano termini da tutti, non solo in aritmetica, ma in algebra stessa pur anche i fattori, che sono parti del termine prodotto, i minutori, che lo sono del minuendo, e quei che concorrono alla divisione.

90. Ogni parola è tanto più chiara, nella lingua in cui essa viene adoperata, quanto minore è il numero delle significazioni attribuite alla medesima, cioè, degli oggetti conosciuti ai quali essa vuolsi riferire: quindi è che quei vocaboli i quali hanno una sola significazione si comprendono sempre a maraviglia da tutti, quando s' intesero pronunziare una volta.

91. Se conviene il dare costantemente in una lingua il medesimo significato ad un invariato vocabolo, ciò lo è tanto più entro i confini di un medesimo discorso: in questo secondo caso l'affare è di assoluta necessità, per non andare in garbuglio: in fatti, se in un calcolo algebrico, dopo di aver cominciato con supporre la m = 25, si continuasse con supporla = 36, e quindi = 3, cosa potrebbe mai altro risultarne che una vera inintelligibile anfania, ed un indigeribile pasticcio o pudino?

92. Diasi dunque a *parti*, che è parola

generica, non solo non mai l' appellazione di termini, ma sempre la particolare denominazione che ad esse conviene, a tenore della loro specie: quindi esse chiaminsi *fattori* nel prodotto, e minotori nel minuendo: vedrassi or ora come convenga chiamarle nella divisione.

93. Ogni espressione algebrica, per poter esser tale, cioè, così denominata, ha da distinguersi dalle altre: a questo fine deve trovarsi, o potersi supporre munita di segno negativo o positivo (57), cioè di addizione o di sottrazione; ma può essere tanto un intero che una frazione.

94. È vero che i così detti due termini della frazione non fanno nella frase algebrica che un termine solo; ma questa circostanza è pei principianti ben altro che ovvia e naturale; giacch' essi nei comuni linguaggi sono avvezzi a trovar nella parola termini un plurale. Io medesimo, che fo ora questa osservazione, mi ricordo di aver trovato in ciò dello imbarazzo, e grande imbarazzo, quando cominciai ad iniziarmi nelle matematiche.

95. Non si può in ogn' istante dell' insegnamento dir tutto, e tutto ripetere, e tutto

glossare in un fiato; eppure se nella espressione dell' insegnamento adoprasi, per inavvedutezza o per altra causa qualunque, un vocabolo non chiaramente e di primo slancio compreso da colui che ascolta o legge l' insegnamento, sarebbe necessario, tra parentesi, spiegare il vocabolo, prima di ultimare la espressione della idea, o sarebbe necessario di almeno far questo immediatamente dopo la espressione di essa; ma con obbligo allora di ripeterla.

96. D' altronde chi studia da sè ha bisogno di trovare nei libri somma chiarezza, precisamente perchè non tiene a canto di sè chi possa dilucidare a lui quei dubbj che nella di lui mente sieno occasionati da una vera od apparente inesattezza di lingua.

97. La frase *prendere pei rotti*, ugualmente che l' altra *operare pei rotti*, quasi sinonima della prima, in un senso almeno, si adatta benissimo tanto a quei risultamenti che presentano vero prodotto, che a quei dai quali offresi vero quoto; ed è non solo genericamente applicabile ai rispettivi opposti due casi, ma pur anche spiegabile indifferentemente a tenore di essi; giacchè si può dir *prendere* per moltiplicare, onde avere un prodotto, e si può dire *prendere* per dividere,

onde ottenere un quoziente. In questo secondo caso è prendere una o più parti del moltiplicando; e nel primo è prendere più volte l' intiero moltiplicando; giacchè la *moltiplicazione è quel fatto, per cui una quantità così aumenta, che il risultamento la comprende senza resto come parte di sè stesso.*

98. Dunque, poichè la frase prendere pei rotti è applicabile tanto a moltiplicazione che a divisione, si potranno pure applicare a queste due operazioni (e perciò anche alla somma ed alla sottrazione, di cui esse sono compendio) i nomi di *prendimento, assunzione, operato, risultamento, espressione, termine*, ec. . . . . *in più, o in meno.*

99. Dunque il preteso *aptioris vocaboli defectus* asserito da *Newton* è imputazione calunniosa.

100. Per altro riflettasi che, a rigore parlando, non è assolutamente necessaria, nè una generica parola, nè una generica frase, per esprimere questi opposti due casi, benchè qualche volta essa cader possa in acconcio, e somministrare in sè stessa il vantaggio di un parlar più conciso.

101. La spartana brevità del parlare cessa per altro di essere una lodevole prerogativa

quando, o per equivoco o per altro motivo, essa può servire di ostacolo alla chiarezza e d' inciampo alla facile intelligenza. Parliamo per essere ascoltati e intesi e capiti: dunque la oscurità è vizio, perchè impedisce di conseguire lo scopo.

102. Resa evidente (come già in parte abbiam fatto, e come or ora ultimeremo di fare) la massima, cioè che ottiensi vero prodotto, e che si eseguisce perciò vera moltiplicazione; come pure che si consegnisce vero quoto, e che perciò si opera vera divisione, anche lavorando per rotti, altro a fare non resta che assegnare alla frase *prendere pei rotti* la significazione rispettivamente (97) dovuta secondo i casi: *prendere in più*, *prendere in meno*.

103. Non basta che le quantità concorrenti ad una decomposizione, vale a dire, destinate a procurare un quoto, abbiano appellazione generica loro propria, come l' hanno le concorrenti a prodotto; ma siccome ciascuna delle prime, quando consta d' intieri soli, ha nome distinto dalla congenere che concorre alla espressione di rotto; giacchè si ha dividendo e contatore, divisore e denominatore, così nel caso di semplice indicazione vuolsi anche un nome generico distinto.

104. L'uffizio congiunto del contatore e del denominatore, è d' indicare una eseguenda divisione: dunque ambedue con nome generico si chiameranno *coindicatori o coindici* di rotto.

105. Non v' ha dubbio che un moltiplicando può essere tanto una frazione quanto un intero; giacchè ogni frazione è vera quantità; ed ogni quantità è cosa moltiplicabile: questi sono assiomi.

106. Non v' ha dubbio che un intiero può aversi per frazione mentita, il cui denominatore sia la unità: questo principio è esso ancora un assioma.

107. Se ciascuno dei coindici (104) di un vero o mentito rotto prendesi per confattore con l' omologo di un rotto astratto moltiplicatore, dopo che questo fu rovesciato, si ottiene un risultamento di prodotti, che, divisi l' uno per l' altro, danno un quoto, nel quale cape il moltiplicando o moltiplicato; e di cui perciò questo è divenuto parte. Dunque si ottiene un prodotto. Così, per esempio, moltiplicando 6 per $4/5$ rovesciati, si ha $6/1 \times 5/4 = 30/4 = 7\ 1/2 = 15/2$; e poichè $6/1 = 12/2$: così 4: 5: 12: 15; motivo pel quale il moltiplicando ha da essere

confattore col denominatore della frazione moltiplicante, se è intero; e debb' esser tale il solo contatore di esso, se è frazionario. Dunque la quarta parte del 6 cinque volte ripetuta, cioè moltiplicata per cinque, vale a dire il $7\ {}^{1}/_{2}$ è un vero prodotto; ed è falso che si ottenga un prodotto per mezzo di una divisione; giacchè la vera causa efficiente del $7\ {}^{1}/_{2}$ è la quarta parte del 6 presa 5 volte, cioè moltiplicata per cinque: dunque la immediata causa efficiente di questo prodotto è una moltiplicazione e non una divisione. Parimente moltiplicando ${}^{2}/_{3}$ per la rovesciata frazione ${}^{9}/_{16}$, si ha ${}^{2}/_{3} \times {}^{16}/_{9} = {}^{32}/_{27} = 1\ {}^{5}/_{27}$, vero prodotto anch' esso per le anzidette ragioni.

108. Dunque per avere il prodotto di una frazione mentita per una vera, o di una vera per una mentita è necessario fare il prodotto di ciascuno dei termini della moltiplicanda per l' omologo della rovesciata moltiplicatrice.

109. Dunque non s' insegnerà più che si divide una frazione per l' altra, moltiplicando ciascun termine di quella per l' omologo (cioè per quello che gode uniformità di luogo) di questa rovesciata; perchè ciò è falso.

110. Dunque è falso ciò che disse *Newton* che *multiplicatio proprie dicitur quae fit per numeros integros*; che è quanto dire la moltiplicazione, in materia di frazioni, non è moltiplicazione. Che sproposito per un *Newton!!!*

111. Se ciascuno dei termini di un vero o mentito dividendo rotto si moltiplica per l'omologo di un' astratta frazione divisore, lasciata nella posizione sua naturale, si ottiene il quoto della prima. Così moltiplicando 6 per $^1/_2$, si ha $^6/_1 \times {}^1/_2 = {}^6/_2 = 3$, vero quoto perchè contenuto nel dividendo 6, e contenuto tanto quanto lo esigeva la frazione dividente. Così pure, avendo a dividere $^1/_2$ per $^1/_2$, si fa $^1/_2 \times {}^1/_2 = {}^1/_4$, vero quoto, perchè contenuto nel dividendo.

112. Dunque è falso ciò che disse *Newton* che *divisio proprie est quae fit per numeros integros*.

113. Nè s'obbietti che così operando si ha un quoto per mezzo di due moltiplicazioni; giacchè i due prodotti, provenienti quali effetti dalle due moltiplicazioni, sono mera preparazione di quegli sfazzoni (88), l'uno dei quali diviso per l'altro indica, genera, esprime, dà il quoto che si cercava; e non

sono già causa immediata del quoto; giacchè una tal causa è la divisione operata in uno di essi, per mezzo dell' altro.

114. Da tutte le osservazioni che si sono andate facendo finora, emerge una gran massima, che a dir vero non interessa direttamente la matematica, benchè in modo indiretto la riguardi, come indirettamente concerne tutte le possibili scienze; ma che tanto importa quanto finora è stata meno curata, cioè che è necessario di studiar bene la propria lingua (*je reviens toujours à mes moutons*), per abituarsi a parlar sempre con chiara esattezza, se si vuol essere intesi, e per non fare nel mondo la meschina figura d' ignoranti e balordi. Se per mancanza di esame in materia di lingua si commettono errori madornali, funesta occasione d'inciampo per secoli, dai *Newton*, che non avrassi a temere da chi non è un *Newton?* . . . . Un errore di lingua può rovinare la fortuna d' un galantuomo. Padri pensateci.

115. Ognun vede pertanto la necessità di rettificare, anzi di riformare del tutto, la lingua della scuola in quegli elementi di matematica che concernono prodotti e quoti di frazioni, e alcuni altri oggetti.

116. Dunque non si dovrà più dire, per esempio, ciò che a giusta ragione ributta i principianti, perchè antilogico è contrario non solamente al buon senso, ma pur anche al senso comune, cioè che il prodotto di $^1/_2$ per $^1/_2$ è $^1/_4$; giacchè non il prodotto di $^1/_2$ per $^1/_2$, ma uno, che è prodotto delle unità moltiplicate a vicenda, diviso per 4, che è prodotto di 2 per 2, genera $^1/_4$ per quoto di $^1/_2$ diviso per $^1/_2$.

117. Dunque tanto meno dovrà dirsi ciò che per giustificazione dell'antilogica or ora enunciata sentenza (116) si suole solennemente, con rumore e con tuono veramente cattedratico asserire, cioè: che il prodotto di due frazioni ha da essere tanto minore della frazione moltiplicata, quanto essa è minore della unità; ed anzi bisognerà insegnare proprio l'opposto, cioè, quello che insegnasi dalla buona madre natura.

118. Questa sciocchezza la dissi anch'io, nel 1806, pagina 33, paragrafo 120, delle mie lezioni di matematica, stampate a Genova.

119. La dissi, è vero, solo per metà, e borbottando anche sotto voce fra denti questa sola metà, come se mi vergognassi di dirla chiara e sonora tutta intiera; ma pur la dissi.

120. Avea fin d'allora per altro il buon senso di allontanarmi dagli scrittori ciurma nel definire la divisione, le ragioni, le potenze, ec.; ma lo feci strascinato dall' impeto della corrente, e dalla cieca venerazione ch' io professava per le dottrine del gran *Newton*, il quale si era lasciato sfuggire di penna questo grosso farfallone; tanto è vero che nelle materie intellettuali, e perciò anche nelle morali, che ne dipendono, niente di cieco vi ha che sia buono, neppure la così detta *cieca ubbidienza*, che i frati con istrisciante stolidezza si erano avvisati di qualificare coll'augusto titolo di virtù.

121. Io mi metto a ginocchio, e inclinato colla fronte a terra, chiedo umilmente e fervorosamente perdono di quel mio torto al santo senso comune, che dicesi destinato a far distinguere nella classe dei bimani l' uomo dalla scimia.

*Potenze.*

122. Inesatto è pure il linguaggio ordinario della maggior parte dei matematici nella definizione delle potenze.

123. Queste da essi appellare si sogliono *prodotti nei quali una medesima quantità è*

*moltiplicata per sè stessa tante volte quante unità, meno una, trovansi nell'esponente.*

124. Io rilevo che questa definizione è viziosa, in primo luogo, perchè in certo modo è basata sulla nozione dell'esponente, nozione figlia della idea di potenza, e perciò ad essa non preesistente.

125. E' viziosa pur anche in quanto non se ne può dedurre la possibilità dell' esponente unità: in fatti volendo a termini di quella definizione spiegare cosa intendasi per potenza di primo grado, bisognerebbe dire che è quel prodotto in cui una quantità è moltiplicata per sè stessa una volta, meno una; ma uno meno uno è zero, cioè niente: dunque la prima potenza sarebbe il prodotto di una quantità niente nè in realtà nè in apparenza moltiplicata, cioè sarebbe contemporaneamente prodotto e non prodotto; il che è assurdo.

126. Non se ne può dedurre la possibilità dell'esponente zero, tanto necessaria per la intelligenza delle formole generali, e per istabilire un passaggio dalle potenze addende alle sottraende; giacchè a termini di quella definizione, per ispiegare cosa intendasi per potenza zero di una quantità bisognerebbe dire

che è prodotto di una quantità moltiplicata per sè stessa una volta meno una, cioè non moltiplicata; e ognun vede che quest'asserzione, oltre di essere falsa, ed oltre di coincidere parola per parola colla definizione di potenza prima, e d'indurre perciò nelle medesime assurdità di prodotto non prodotto, dà di più per potenza la radice di potenza, come la diede per potenza prima; ne fa intanto conoscere cosa sia la potenza zero di una quantità; giacchè non la definisce nè punto nè poco, nè anche in falso: e poi appunto perchè coincide senza cambiar di parole ad essere definizione di due potenze diverse, si ha già in ciò una prova che non ne definisce realmente alcuna.

127. Dunque secondo i termini degli antichi sarebbe impossibile dimostrare, almeno con prova diretta, che non solamente un numero qualunque secondo i diversi casi, o sia gradi potenziali, e conformemente ad essi, può servire di esponente, ma che può, e che in un particolar caso deve anche adoperarsi a questo medesimo intento la unità, e che in un altro particolar caso va usato lo zero.

128. Meno assai che la potenza zero, e

che la potenza prima, saranno spiegabili a termini dell'antica definizione le potenze negative; e ancora meno lo saranno le proprietà di tutte queste potenze prima, zero e negative.

129. Nelle su enunciate (118) mie lezioni di matematica diedi le potenze per prodotti, ne' quali una data quantità entrò più o meno volte qual confattore della unità. Ora trovo necessario di aggiungere in quella definizione alla parola prodotti le parole *veri o mentiti*.

130. Dunque, siccome da questa definizione può dedursi una qualunque potenza che abbia per esponente un numero (31) vero qualunque, per esempio la potenza terza di $a$ che sarebbe $1 \times a \times a \times a = a\,a\,a = a^3$, e la potenza seconda di $a$ che sarebbe $1 \times a \times a = a^2$, così anche può conchiudersi la potenza unità, cioè quella il cui esponente sarà la unità (dalla quale nasce il numero), che vuol dire la potenza prima di $a$; cioè si avrà $1 \times a = a'$, cioè $a$, quantità che mentisce, ma che non ha vera natura di prodotto, perchè, come abbiamo detto (76) la unità non è mai vero moltiplicatore, nè vero divisore; e se ne può conchiudere che la

potenza zero di $a$ è $1 \times a - a = 1 \times a^{1-1} = 1 \times a^0 = 1$; giacchè 1 moltiplicato per $a$ zero volte è uno che pare, ma che non è moltiplicato per $a$; e che perciò resta intatto.

131. Siccome il raziocinio fatto per la potenza zero di $a$ sempre ha luogo con qualsivoglia quantità, come $b$, $m$, $x$ ec., che sia elevata al grado potenziale zero, così dalla mia definizione può dedursi che la potenza zero di qualunque si voglia quantità è apparenza di prodotto bensì, ma realmente null'altro mai che una espressione particolare della unità.

132. Si capisce facilmente che lo zero è limite delle quantità opposte; e che perciò, se il segno di addizione + è destinato ad esprimere una di due opposte, come sarebbe un credito, una linea, una forza, ec., che partendo da un punto proceda verso destra, od all' insù, ec., il segno di sottrazione — dovrà essere destinato ad esprimere l'opposto, cioè un debito, una linea, una forza, ec., che partendo dal detto punto o sia limite, che è zero estensione, zero forza, zero azione, ec., proceda verso la sinistra od all' i

133. Badisi che non a caso, parlando di punto, l' ho adoperato in senso sinonimo per la estensione zero, appunto perch' esso non è zero assoluto, ma è solo mancanza di estensione, cioè zero relativamente ad estensione; giacchè è limite di essa e non parte; dunque non è estensione; ma è pur qualche cosa relativamente ad essa, poichè è limite della medesima misurata solo in lunghezza.

134. Dunque a tenore della mia definizione è facile a capirsi che, se le potenze da calcolarsi al di là dello zero verso la destra sono quantità positive, cioè da aggiungersi, che val quanto da notarsi col segno di addizione +, le opposte, vale a dire, quelle da calcolarsi al di qua dello zero verso la sinistra, saranno negative, cioè sottrattive, o sia da notarsi col segno di sottrazione meno —.

135. Dunque, posta la mia definizione, è facile a capire che una potenza negativa non è mai meno di zero; ma che è sempre quantità reale, opposta però e solo alla corrispondente quantità positiva.

136. Dunque se ne può anche conchiudere che in natura nulla esiste che sia meno di nulla.

137. Ecco in qual modo, analizzate le cose, e rettificato il linguaggio, a tenore dei risultamenti dell'analisi fatta di esso, ogni cosa diventa chiara per tutti; e non si dogmatizzano assurdi.

*Ragioni.*

138. *Rapporto* è nome generico: esso ha un significato più esteso che il nome *ragione*.

139. Il vocabolo *ragione* altro non dinota in matematica se non che una fra le molte, anzi infinite, specie di rapporti che si danno. Conosceremo qual essa sia, dopo che avremo veduto in che consista la idea di rapporto.

140. Confrontando insieme due idee omogenee, e da un tale confronto deducendone una terza che ci rappresenti la maniera di essere di una delle due comparate relativamente all'altra, si ha in quella terza idea ciò che intendesi per rapporto: le idee comparate sono i termini o sia limiti del rapporto, cioè i confini oggetti di comparazione.

141. Infiniti sono gli oggetti fra loro omogenei, che possono cadere sotto l' impero de' sensi, della immaginazione, del pensiero. Dunque infinite sono le idee fra le quali si

può stabilire un confronto per dedurne un rapporto : tali sono liquido e liquido , solido e solido , colore e colore , suono e suono , luce e luce , bellezza e bellezza , virtù e virtù , ec. ; e infiniti sono gli aspetti fra i quali tutti gli oggetti reciprocamente omogenei possono confrontarsi a vicenda : tali sono durata , estensione , intensità , figura , ec.

142. Dunque i rapporti delle reali , future, passate , presenti , possibili persone , cose , nozioni , od idee comparabili , sono infiniti.

143. La *ragione* è un rapporto di grandezza (139) vigente fra due quantità paragonate fra loro , ed una delle quali può essere considerata come parte dell'altra.

144. Da questa definizione si dedurrà che le così dette , o pretese , *ragioni aritmetiche* non sono ragioni , ma semplici rapporti (141) di sola differenza ; perchè il confronto dei termini di esse non dà la menoma idea del rapporto di grandezza che vige fra le medesime. In fatti non si può dire che due eguali rapporti di differenza sieno due ragioni eguali ; altrimenti bisognerebbe ammettere che la ragione di 2 a 5 sia eguale a quella di 94 a 97. Dunque nè anche si potrà dire che ad esse competa il nome di ragioni. Dunque l'ap-

pellarle tali è abusare del senso delle parole, e volersi rendere inintelligibile.

145. Dunque si farà notare ai principianti che quei libri di matematica nei quali le parole *rapporto* e *ragione* si trovano adoperate indifferentemente l'una per l'altra, come parole a vicenda sinonime, sono inesatti.

146. Se ne dedurrà inoltre che sono eguali fra loro quelle ragioni le quali presentano vera equicapienza, cioè quelle i più piccoli termini delle quali entrano ciascuno per egual modo nei rispettivi confrontati maggiori.

147. Se ne ricaverà che non esiste ragione fra quantità eguali; poichè una di esse non può essere parte (143) dell'altra; e che si ha proporzione per mezzo di due ragioni di equicapienza; che è quanto dire, la *proporzione consiste nel complesso di due ragioni eguali.*

148. Se ne arguirà che due quantità eguali possono essere considerate come limite fra le ragioni di maggiorità, e quelle di minorità, in quella guisa che lo zero è limite fra le quantità opposte.

149. L'asserire, come si fa comunemente da molti, che il valore di una ragione consiste nel quoto dei termini che la compongono, è, non solamente asserire il falso, e

confondere (46) le ragioni con le frazioni, ma inuoltre è lo stesso che dare per misura, cioè per valore di una ragione, la sola semplificazione di essa; cosa che non la misura, ma che solo ne cambia l'apparenza: così per esempio il dire che la ragione di 36 a 12 è 3, val quanto dire che è 3 ad 1.

150. La misura d'una ragione qualunque è ragione, come la misura di linea è linea, quella di superficie è superficie, quella di solido è solido, quella di suono è suono, quella di vivacità è vivacità, ec.; giacchè ogni misura è omogenea col misurato.

151. Già dimostrossi (46) per induzione, la quale tra le prove è la meno considerevole di tutte, che frazione è ben diversa da ragione; ma questa verità risulta pur anche dimostrata direttamente, osservando che secondo la definizione, i termini della ragione devono essere omogenei, atteso che l'uno dee poter essere (143) considerato come parte dell'altro; il che non può accadere nelle frazioni, nelle quali il denominatore è quantità sempre astratta, mentre al contrario il contatore (73) può essere e non essere astratto.

152. Il definire le ragioni nel modo che or ora si è stabilito, non solo fa sparire

l'inconveniente di confonderle colle frazioni (46), e non solo perciò toglie pure tutte quelle altre sconvenienze che risultano da questa; ma inoltre le definizioni subalterne di ragione composta, di ragione duplicata, triplicata, sotto duplicata, ec., si derivano dalla definizione generale affatto naturalmente; nè si ha più bisogno di pronunziare l'antilogica sentenza figurante in una moltitudine di libri elementari, cioè, che ragione duplicata non è lo stesso che ragione dupla; come se l'una e l'altra di queste due parole *dupla* e *duplicata* non esprimesse una quantità la quale è grande una volta più della data.

153. D'altronde a tenore di questa definizione si prova la immediata relazione di analogia che dee trovarsi tra le ragioni e i logaritmi; relazione di analogia, dalla quale derivano tutte le luminose idee che la teoria costituiscono di questi numeri; relazione di analogia, dalla quale colpito e penetrato *Cotes*, poi seguìto in parte da *Saunderson*, disse nel suo trattato *De harmonia mensurarum*, cap. 3, *logaritmi sunt rationum mensurae numerales*.

154. Dalla esattissima definizione dei loga-

ritmi, ora enunciata di *Cotes*, deducesi come per corollario quella che di essi fu data dal grand'*Eulero*, il quale chiamolli *exposans des puissances auxquelles il faut élever un nombre quelconque pour former tous les autres;* verissima proposizione, ma non esatta definizione.

155. La circostanza di figliazione ora osservata dimostra che la definizione di *Cotes*, e non già quella di Eulero è la giusta e vera definizione; poichè non è vera definizione quella qualunque, anche innegabile massima, che, dipendendo qual corollario da un' altra, ha bisogno di essere dimostrata, e che da quella da cui emana prende il genere di prova di cui ha bisogno.

156. E' per questa medesima circostanza, e per l'istesso motivo di essa che neppure devesi avere qual esatta definizione de' logaritmi quella che gli appella termini di una progressione aritmetica corrispondenti a quei di una progressione d'equicapienti ragioni, cioè di quella tal progressione che quasi da tutti molto impropriamente chiamasi *progressione geometrica*; dico impropriamente, perchè le quantità che formano questa progres-

sione non sono sempre ed esclusivamente terreni od estensioni qualunque.

157. Quest'ultima poi, non solo è non esatta definizione, ma è di più falsa proposizione, in quanto che, non determinando di quale fra le infinite possibili progressioni aritmetiche si parli, sembrano ammesse indifferentemente tutte; il che non darebbe più zero per logaritmo della unità.

158. Le idee da me sviluppate in queste poche paginette sono a parer mio abbastanza importanti per attirarsi l'attenzione dei più grandi professori, e più ancora di quei che, presiedendo agli studj, sono animati da vero zelo di togliere alla intelligenza, ed ai progressi delle giovani menti, gli ostacoli che nello studio s'incontrano. I pedanti rideranno probabilmente alle parole *contatore*, *sfazzoni*, ec.; ma i sensati non sogliono abbassare mai tanto lo sguardo, che possano avvedersi della esistenza di questi esseri miserabili. Dal dotto si esamina, si loda col perchè, o si critica, o si dice non so: gli sciocchi *quecunque ignorant despiciunt*, dicea Cicerone.

FINE.

*Nota di alcune altre opere dell' Avvocato G. B. F. De Filippi, che trovansi ancora vendibili nel Negozio Silvestri, in Milano.*

Poesie, Genova, *Marco Rigo*, 1798, in 4.

Discorsi soll'amore per la gloria. Genova, *Marco Rigo*, 1798, in 8.

—— Soi rapporti morali di padre a figlio. Genova, *Marco Rigo*, 1798, in 8.

Elementi di Geometria e di Trigonometria. Genova, *Tealdo*, 1802, in 12.

Lezioni di Matematica. Genova. *Frugoni*, 1806, in 8.

Grammatica italiana. Genova. *Delle Piane*, 1815, in 12.

La terza edizione italiana degli elementi di sfera e geografia. Genova, *Ponthenier*, 1816, in 12.

Il bottigliere, o sia pratiche istruzioni sulla maniera di ben conservare in bottiglie i vioi prelibati. Milano, *Fusi*, 1818, in 8.

Bigattologia. Milano, *Silvestri*, 1818, in 8.

Studio di liogua italiaoa. Milano, *Silvestri*, 1820, in 8.



